Über Transformationen von isoperimetrischen Differentialgleichungen und deren Reduktion auf eine nicht–lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung*

Carl Gustav Jacob Jacobi

Erste Transformation

1.

Es sei vorgelegt, das Integral $\int Udt$ zu *einem Maximum oder Minimum* zu machen, oder es sei die Gleichung

$$\delta \int Udt = 0$$

vorgelegt, während δ das bekannte Zeichnen der Variation bedeutet. Man lege zuerst fest, dass der Ausdruck U eine einzige Funktion x von t zusammen

*Originaltitel: "De Aequationum Differentialum Isoperimetricum Transformationibus earumque Reductione ad Aequationem Differentialem Partialem Primi Ordinis Non Linearem", aus dem Nachlass von Jacobi der Öffentlichkeit zugänglich gemacht von A. Clebsch. Nachdruck in: G.G.J. Jacobi's gesammelte Werke – Band 5, pp. 465 – 482, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

mit ihren Ableitungen x', x'', $\cdots$, $x^{(m)}$ involviert. Dann wird diese Differentialgleichung von $2m$–ter Ordnung zu integrieren sein:

$$(1) \quad 0 = \frac{d^m U}{dt^m} - \frac{d^{m-1} U_{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots \pm U_0,$$

in welcher ich der Kürze wegen

$$U_i = \frac{\partial U}{\partial x^{(i)}}, \quad U_0 = \frac{\partial U}{\partial x}$$

setze. Es sei

$$(2) \quad \xi = U_m = \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}$$

und mithilfe dieser eliminiere man aus der Funktion

$$(3) \quad V = U - x^{(m)} \xi$$

den Term $x^{(m)}$. Nachdem wir diese Funktion variiert haben, wobei wir V als Funktion der Größen t, x, x', $\cdots$, $x^{(m-1)}$, ξ betrachten, aber die Funktion U als Funktion der Größen t, x, x', $\cdots$, $x^{(m-1)}$, $x^{(m)}$ ansehen, geht nach Verwerfen der sich aufhebenden Terme

$$\xi \delta x^{(m)} - \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}} \delta x^{(m)}$$

hervor:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t}\delta t + \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial x'}\delta x' + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}}\delta x^{(m-1)} + \frac{\partial V}{\partial \xi}\delta \xi \\ = &\frac{\partial U}{\partial t}\delta t + \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial x'}\delta x' + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}\delta x^{(m-1)} + x^{(m)} \xi \end{aligned}$$

Daraus erlangen wir

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial U}{\partial x'}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}} = \frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} = -x^{(m)}$$

oder, wenn wir auch

$$V_i = \frac{\partial V}{\partial x^{(i)}}, \quad V_0 = \frac{\partial V}{\partial x}$$

setzen, wird

$$(4)\quad U_0 = V_0,\quad U_1 = V_1,\quad U_2 = V_2,\quad \cdots,\quad U_{m-1} = V_{m-1},\quad U_m = \xi,\quad \frac{\partial V}{\partial \xi} = -x^{(m)}$$

Daher kann die Differentialgleichung (1), vorgelegt zwischen den zwei Variablen x und t, mit diesem System von zwei Gleichungen ersetzt werden:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d^m x}{dt^m} = -\dfrac{\partial V}{\partial \xi}, \\ \dfrac{d^m \xi}{dt^m} = \dfrac{d^{m-1} V_{m-1}}{dt^{m-1}} - \dfrac{d^{m-2} V_{m-2}}{dt^{m-2}} + \cdots \mp V_0 \end{cases}$$

Die Differentiationen auf der rechten Seite der zweiten Gleichung führe man so durch, dass nach jeder Differentiation anstelle von $dx^{(m-1)}$ sein Wert aus der ersten Gleichung

$$dx^{(m-1)} = -\frac{\partial V}{\partial \xi} dt$$

eingesetzt wird. Daher wird die rechte Seite jener Gleichung auf eine Funktion der Größen

$$t,\quad x,\quad x',\quad \cdots,\quad x^{(m-1)},\quad \xi,\quad \xi',\quad \cdots, \xi^{(m-1)}$$

zurückgeführt, welche ich mit

$$(6)\quad \Xi = \frac{d^m \xi}{dt^m}$$

bezeichnen werde. Zugleich ist klar, dass der einzige mit $\xi^{(m-1)}$ behaftete Term von Ξ dann $\frac{\partial V_{m-1}}{\partial \xi} \xi^{(m-1)}$ sein wird, welcher aus der Größe $\frac{d^{m-1} V_{m-1}}{dt^{m-1}}$ hervorgeht. Daher wird

$$(7)\quad \frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{m-1}} = \frac{\partial V_{m-1}}{\partial \xi}$$

sein. Die Differentialgleichung (1) von $2m$–ter Ordnung, vorgelegt zwischen x und t, ist im Vorhergehenden in ein System von zwei Differentialgleichungen von m–ter Ordnung in x, t und ξ überführt worden:

$$(8)\quad \frac{d^m x}{dt^m} = -\frac{\partial V}{\partial \xi},\quad \frac{d^m \xi}{dt^m} = \Xi.$$

Diese Differentialgleichungen erfreuen sich der Form, welche man für gewöhnlich Differentialgleichungen als die normale zuschreibt, in welcher natürlich auf der einen Seite der einzelnen Gleichungen die höchsten Differentiale der abhängigen Variablen stehen, sodass die andere Seite der Gleichungen lediglich geringere Differentiale beinhaltet.

Gemäß der Vorschriften, angegeben in der Abhandlung *de novo Multiplicatore*, wird ein Multiplikator der Gleichungen (8) vermöge nachstehender Formel bestimmt:

$$\frac{d \log M}{dt} - \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial x^{(m-1)}} + \frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{(m-1)}} = 0$$

Es wird aber aus (7)

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{(m-1)}} = \frac{\partial V_{m-1}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^{(m-1)} \partial \xi},$$

also

$$\frac{d \log M}{dt} = 0$$

Diese Formel lehrt, *dass ein Multiplikator der Gleichungen (8), in welche ich die vorgelegte transformiert habe, der Einheit gleich ist.*

2.

Wir wollen nun annehmen, dass U zwei Funktionen x und y zusammen mit den Ableitungen $x', x'', \cdots, x^{(m)}, y', y'', \cdots, y^{(n)}$ beinhaltet. Nach Setzen von

$$(1) \quad \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}} = \xi, \quad \frac{\partial U}{\partial y^{(n)}} = \eta$$

$$(2) \quad V = U - x^{(m)}\xi - y^{(n)}\eta$$

folgt:

$$\begin{aligned} \delta V = \frac{\partial U}{\partial t}\delta t + \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial x'}\delta x' + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}\delta x^{(m-1)} - x^{(m)}\delta\xi, \\ + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta y' + \cdots + \frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}\delta y^{(n-1)} - y^{(n)}\delta\eta, \end{aligned}$$

und nach Verwerfen der sich aufhebenden Terme:

$$\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}\delta x^{(m)} + \frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} - \xi\delta x^{(m)} - \eta\delta y^{(n)}$$

Daher, wenn wir mithilfe der Gleichungen (1) in V anstelle der Größen $x^{(m)}$ und $y^{(n)}$ die Größen ξ und η einführen, findet man

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial U}{\partial x'}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}} = \frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}},\\
&\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{\partial U}{\partial y'}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}},\\
&\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} = -x^{(m)}, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = -y^{(n)}.
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen all dieser gehen die Differentialgleichungen, welche zu integrieren sind,

$$(3) \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{d^m \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt^m} - \dfrac{d^{m-1} \frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}}{dt^{m-1}} + \cdots \pm \dfrac{\partial U}{\partial x} \\[2ex] 0 = \dfrac{d^n \frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^n} - \dfrac{d^{n-1} \frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}}{dt^{n-1}} + \cdots \pm \dfrac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

in die folgenden über:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^m x}{dt^m} = -\dfrac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \dfrac{d^n y}{dt^n} = -\dfrac{\partial V}{\partial \eta}, \\[2ex] \dfrac{d^m \xi}{dt^m} = \dfrac{d^{m-1} \frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}}}{dt^{m-1}} - \dfrac{d^{m-2} \frac{\partial V}{\partial x^{(m-2)}}}{dt^{m-2}} + \cdots \mp \dfrac{\partial V}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{d^n \eta}{dt^n} = \dfrac{d^{n-1} \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}}{dt^{n-1}} - \dfrac{d^{n-2} \frac{\partial V}{\partial y^{(n-2)}}}{dt^{n-2}} + \cdots \mp \dfrac{\partial V}{\partial y}. \end{cases}$$

Wenn $n \leq m$ ist, führe man auf der rechten Seite der letzten Gleichung die Differentiationen so aus, dass nach jeder einzelnen die Werte

$$\frac{dx^{(m-1)}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \frac{dy^{(n-1)}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \eta}$$

eingesetzt werden, woher die Größen der rechten Seite einer Funktion

$$
\begin{array}{llllll}
t, & x, & x', & x'', & \cdots, & x^{(m-1)}, \\
& y, & y', & y'', & \cdots, & y^{(n-1)}, \\
& \xi, & \xi', & \xi'', & \cdots, & \xi^{(m-1)}, \\
& \eta, & \eta', & \eta'', & \cdots, & \eta^{(n-1)}
\end{array}
$$

gleich werden, welche ich mit

$$H = \frac{d^n \eta}{dt^n}$$

bezeichne. In dieser Funktion findet sich $\eta^{(n-1)}$ nur in einem einzigen Term, welcher aus

$$\frac{d^{n-1} \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}}{dt^{n-1}}$$

hervorgeht:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n-1)} \partial \eta} \eta^{(n-1)},$$

woher

$$(5) \quad \frac{\partial H}{\partial \eta^{(n-1)}} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n-1)} \partial \eta}$$

wird. Weiter sind im Ausdruck, welcher $\frac{d^m \xi}{dt^m}$ gleich wird, die Differentiationen so durchzuführen, dass nach jeder einzelnen Differentiation für $dx^{(m-1)}$, $dy^{(n-1)}$ die Werte $-\frac{\partial V}{\partial \xi} dt$, $-\frac{\partial V}{\partial \eta} dt$ eingesetzt werden, und darüber hinaus, wo $\frac{d^n \eta}{dt^n} = \eta^{(n)}$ bei die Differentiation hervorgeht, dafür der Wert H eingesetzt wird. Daher wird $\frac{d^m \xi}{dt^m}$ gleich einer Funktion der Größen

$$
\begin{array}{llllllllll}
t, & x, & x', & \cdots, & x^{(m-1)}, & y, & y', & \cdots, & y^{(n-1)}, \\
& \xi, & \xi', & \cdots, & \xi^{(m-1)}, & \eta, & \eta', & \cdots, & \eta^{(n-1)}
\end{array}
$$

gefunden, welche man mit

$$\Xi = \frac{d^m \xi}{dt^m}$$

bezeichne. In dieser Funktion wird $\xi^{(m-1)}$ nur in einem einzigen Term gefunden, welcher aus

$$\frac{d^{m-1}\frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}}}{dt^{m-1}}$$

hervortritt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^{(m-1)}\partial \xi}\xi^{(m-1)},$$

woher

$$(6) \qquad \frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{(m-1)}} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^{(m-1)}\partial \xi}$$

wird. Die vier Differentialgleichungen

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^m x}{dt^m} = -\dfrac{\partial V}{\partial \xi}, & \dfrac{d^n y}{dt^n} = -\dfrac{\partial V}{\partial \eta}, \\ \dfrac{d^m \xi}{dt^m} = \Xi, & \dfrac{d^n \eta}{dt^n} = H, \end{cases}$$

in welche das System der zwei vorgelegten Gleichungen (3) transformiert worden ist, erfreut sich rechter Seiten, welche nur niedere Differentiale als die verwickeln, die auf der linken Seite stehen. Deshalb wird die Differentialgleichung, mit welcher der Multiplikator von (7) definiert wird,

$$-\frac{d\log M}{dt} = -\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial x^{(m-1)}} - \frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{(m-1)}} + \frac{\partial H}{\partial \eta^{(n-1)}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet gemäß (5) und (6) identisch, weshalb sich $M = 1$ setzen lässt.

Dieselbe Methode kann auf den Fall angewandt werden, in welchem die Funktion U außer der unabhängigen Variablen t beliebig viele Funktionen x_1, $x_2, \cdots, x_m$ zusammen mit deren Differentialen verwickelt, welche respektive in U zur Ordnung $m_1, m_2, \cdots, m_n$ ansteigen. Indem man anstelle von $x_1^{(m_1)}$, $x_2^{(m_2)}, \cdots, x_n^{(m_n)}$ die Größen

$$\xi_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1)}}, \quad \xi_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2)}}, \quad \cdots, \quad \xi_n = \frac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n)}},$$

einführt, können die n zu integrierenden Differentialgleichungen in $2n$ andere transformiert werden, mit welchen die Differentiale

$$\begin{array}{cccc} \frac{d^{m_1}x_1}{dt^{m_1}} & \frac{d^{m_2}x_2}{dt^{m_2}} & \dots, & \frac{d^{m_n}x_n}{dt^{m_n}} \\ \frac{d^{m_1}\xi_1}{dt^{m_1}} & \frac{d^{m_2}\xi_2}{dt^{m_2}} & \dots, & \frac{d^{m_n}\xi_n}{dt^{m_n}} \end{array}$$

durch Formeln ausgedrückt werden, welche allein niedere Differentiale als jene beinhalten. Der Multiplikator dieser Differentialgleichungen wird der *Einheit* gleich.

Eine weitere Transformation

Reduktion von isoperimetrischen Problemen auf nicht–lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Nun werde ich eine andere höchst merkwürdige Transformation der Differentialgleichungen angeben, von deren Integration die Lösung der Gleichung

$$\delta \int U dt = 0$$

abhängt. Weil sich die zu verwendende Methode ohne Weiteres auf eine beliebige Anzahl an Funktionen ausdehnen ließe, wird es hinreichen, sie auf drei Funktionen x, y, z von t anzuwenden, welche U zusammen mit ihren Ableitungen

$$x', \ x'', \ \dots, x^{(m)}, \ y', \ y'', \ \dots, \ y^{(n)}, \ z', \ z'', \ \dots, z^{(p)}$$

enthält. In diesem Fall sind die drei zu integrierenden Differentialgleichungen die folgenden:

$$(1) \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{d^m \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt^m} - \dfrac{d^{m-1} \frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}}{dt^{m-1}} + \dots \pm \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{d^n \frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^n} - \dfrac{d^{n-1} \frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}}{dt^{n-1}} + \dots \pm \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ 0 = \dfrac{d^p \frac{\partial U}{\partial z^{(p)}}}{dt^p} - \dfrac{d^{p-1} \frac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}}}{dt^{p-1}} + \dots \pm \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Ich setze:

$$
(2)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}} = \xi,\\
&\frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt} = \xi_1,\\
&\frac{\partial U}{\partial x^{(m-2)}} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial x^{(m-2)}}}{dt^2} = \xi_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial U}{\partial x'} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x''}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial x'''}}{dt^2} - \dots \mp \frac{d^{m-1}\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt^{m-1}} = \xi_{m-1};\\
&\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}} = \eta,\\
&\frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt} = \eta_1,\\
&\frac{\partial U}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial y^{(n-2)}}}{dt^2} = \eta_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial U}{\partial y'} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial y''}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial y'''}}{dt^2} - \dots \mp \frac{d^{n-1}\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^{n-1}} = \eta_{n-1};\\
&\frac{\partial U}{\partial z^{(p)}} = \zeta,\\
&\frac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial z^{(p)}}}{dt} = \zeta_1,\\
&\frac{\partial U}{\partial z^{(p-2)}} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial z^{(p-2)}}}{dt^2} = \zeta_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial U}{\partial z'} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial z''}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial z'''}}{dt^2} - \dots \mp \frac{d^{p-1}\frac{\partial U}{\partial z^{(p)}}}{dt^{p-1}} = \zeta_{p-1}.
\end{aligned}\right.
$$

Aus diesen Ausdrücken folgt:

$$
(3)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial x^{(m)}} = \xi, & \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n)}} = \eta, & \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p)}} = \zeta, \\
\dfrac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}} = \xi_1 + \dfrac{d\xi}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}} = \eta_1 + \dfrac{d\eta}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}} = \zeta_1 + \dfrac{d\zeta}{dt}, \\
\dfrac{\partial U}{\partial x^{(m-2)}} = \xi_2 + \dfrac{d\xi_1}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n-2)}} = \eta_2 + \dfrac{d\eta_1}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p-2)}} = \zeta_2 + \dfrac{d\zeta_1}{dt}, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \\
\dfrac{\partial U}{\partial x'} = \xi_{m-1} + \dfrac{d\xi_{m-2}}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial y'} = \eta_{n-1} + \dfrac{d\eta_{n-2}}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial z'} = \zeta_{p-1} + \dfrac{d\zeta_{p-2}}{dt}.
\end{cases}
$$

Diesen Gleichungen sind die folgenden hinzuzufügen, welche aus selbigen nach Festlegen der Differentiale folgen:

$$
(4)\quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d\xi_{m-1}}{dt}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{d\eta_{n-1}}{dt}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{d\zeta_{p-1}}{dt}.
$$

Man setze nun

$$
V = U - x^{(m)}\xi - y^{(n)}\eta - z^{(p)}\zeta;
$$

durch Verwerfen der sich gegenseitig aufhebenden Terme folgt:

$$
\begin{aligned}
\delta V = \frac{\partial U}{\partial t}\delta t &+ \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial x'}\delta x' + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}\delta x^{(m-1)} - x^{(m)}\delta\xi \\
&+ \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta y' + \cdots + \frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}\delta y^{(n-1)} - y^{(n)}\delta\eta \\
&+ \frac{\partial U}{\partial z}\delta z + \frac{\partial U}{\partial z'}\delta z' + \cdots + \frac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}}\delta z^{(p-1)} - z^{(p)}\delta\zeta.
\end{aligned}
$$

Es sei $x^{(i)}$ eine der Größen x, x', $\cdots$, $x^{(m-1)}$ sowie $y^{(i)}$ eine der Größen y, y', $\cdots$, $y^{(n)}$ und schließlich $z^{(i)}$ eine der Größen z, z', $\cdots$, $z^{(p-1)}$; es ist aus der vorherigen Formel klar, dass

$$
(5)\quad \begin{cases}
\left(\dfrac{\partial V}{\partial x^{(i)}}\right) = \dfrac{\partial U}{\partial x^{(i)}}, & \left(\dfrac{\partial V}{\partial y^{(i)}}\right) = \dfrac{\partial U}{\partial y^{(i)}}, \quad \left(\dfrac{\partial V}{\partial z^{(i)}}\right) = \dfrac{\partial U}{\partial z^{(i)}}, \\
\left(\dfrac{\partial V}{\partial \xi}\right) = -x^{(m)}, & \left(\dfrac{\partial V}{\partial \eta}\right) = -y^{(n)}, \quad \left(\dfrac{\partial V}{\partial \zeta}\right) = -z^{(p)}
\end{cases}
$$

wird, wo ich die partiellen Ableitungen mit den Klammern andeute, und dass anstelle von $x^{(m)}$, $y^{(n)}$, $z^{(p)}$ die Größen ξ, η, ζ in das System der unabhängigen Variablen einzuführen sind, auf welches die partiellen Ableitungen sich beziehen. Diese Elimination von $x^{(m)}$, $y^{(n)}$, $z^{(p)}$ ist vermöge der oben aufgestellten Gleichungen

$$
\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}} = \xi, \quad \frac{\partial U}{\partial y^{(n)}} = \eta, \quad \frac{\partial U}{\partial z^{(p)}} = \zeta
$$

zu erwirken. Aus den Formeln (5) folgt dieser Ausdruck von U über V:

$$
U = V - \xi\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) - \eta\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) - \zeta\left(\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)
$$

Indem (5) in den Gleichungen (3) und (4) eingesetzt wird und die Klammern nun fort gelassen worden sind, *erlangen wir dieses transformierte System von gewöhnlichen Differentialgleichungen:*

$$
(6)\quad \begin{cases}
\dfrac{d^m x}{dt^m} = -\dfrac{\partial V}{\partial \xi}, & \dfrac{d^n y}{dt^n} = -\dfrac{\partial V}{\partial \eta}, & \dfrac{d^p z}{dt^p} = -\dfrac{\partial V}{\partial \zeta}, \\
\dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}} - \xi_1, & \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} - \eta_1, & \dfrac{d\zeta}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial z^{(p-1)}} - \zeta_1 \\
\dfrac{d\xi_1}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x^{(m-2)}} - \xi_2, & \dfrac{d\eta_1}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial y^{(n-2)}} - \eta_2, & \dfrac{d\zeta_1}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial z^{(p-2)}} - \zeta_2 \\
\dots \quad \dots & \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \\
\dfrac{d\xi_{m-2}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x'} - \xi_{m-1}, & \dfrac{d\eta_{n-2}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial y'} - \eta_{n-1}, & \dfrac{d\zeta_{p-2}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial z'} - \zeta_{p-1} \\
\dfrac{d\xi_{m-1}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x}, & \dfrac{d\eta_{n-1}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial y}, & \dfrac{d\zeta_{p-1}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial z}
\end{cases}
$$

Die vorherigen Differentialgleichungen, welche den Platz der drei vorgelegten Differentialgleichungen (1) einnehmen, bilden ein System von $m+n+p+3$ Differentialgleichungen in den Variablen

$$t,\ x,\ y,\ z,\ \xi,\ \xi_1,\ \cdots,\ \eta,\ \eta_1,\ \cdots,\ \eta_{n-1},\ \zeta,\ \zeta_1,\ \cdots,\ \zeta_{p-1},$$

von welchen drei respektive von der Ordnung m, n, p sind, alle übrigen von erster Ordnung. Und jene Gleichungen erfreuen sich jener gleichsam kanonischen Form, in welcher auf der rechten Seite nur niedere Differentiale gefunden werden als die, die sich auf der linken Seite befinden. In diese Form sind nun die vorgelegten Differentialgleichungen gebracht worden und es wurden keine Differentiationen durchgeführt, die in der ersten Transformation notwendig waren, überdies bedurfte es keiner Eliminationen abseits derjenigen, dass anstelle von $x^{(m)}$, $y^{(n)}$, $z^{(p)}$ in die Funktion

$$V = U - x^{(m)}\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}} - y^{(n)}\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}} - z^{(p)}\frac{\partial U}{\partial z^{(p)}}$$

die Größen

$$\xi = \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}},\quad \eta = \frac{\partial U}{\partial y^{(n)}},\quad \zeta = \frac{\partial U}{\partial z^{(p)}}$$

einzuführen waren.

Weiter findet man leicht einem Multiplikator M der vorherigen Gleichungen (6). Denn weil sich jene Gleichungen der kanonischen Form erfreuen, wird $-\frac{d\log M}{dt}$ dem Aggregat der partiellen Ableitungen der Ausdrücke gleich, welche auf der rechten Seite stehen, wenn freilich jeder dieser Ausdrücke nach der Größe differenziert wird, dessen Ableitung er gleich wird. Aber aus der Menge der Gleichungen (6) sind es nur sechs, nämlich

$$\frac{d^m x}{dt^m} = -\frac{\partial V}{\partial \xi},\quad \frac{d^n y}{dt^n} = -\frac{\partial V}{\partial \eta},\quad \frac{d^p z}{dt^p} = -\frac{\partial V}{\partial \zeta},$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}} - \xi_1,\quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x^{(y-1)}} - \eta_1,\quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z^{(p-1)}} - \zeta_1,$$

in welchen die rechten Seiten nicht frei von den Größen sind, deren Ableitung sie gleich werden. Gemäß der angegebenen Regel werden nur die rechten Seiten der ersten drei Gleichungen respektive nach $x^{(m-1)}$, $y^{(n-1)}$, $z^{(p-1)}$ zu differenzieren sein, die rechten Seiten der drei letzten respektive nach ξ, η, ζ, und dann wird das Aggregat aller sechs hervorgehenden partiellen Ableitungen zu bilden sein. Es ist klar, dass dieses Aggregat identisch verschwindet, weil die je zwei Terme

$$\begin{gathered} -\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial x^{(m-1)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^{(m-1)} \partial \xi}, \\ -\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n-1)} \partial \eta}, \\ -\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta \partial z^{(p-1)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^{(p-1)} \partial \zeta} \end{gathered}$$

sich gegenseitig aufheben. Daher wird

$$\frac{d \log M}{dt} = 0,$$

oder der Multiplikator des Systems von transformierten Differentialgleichungen (5) lässt sich der *Einheit* gleich setzen.

Den Differentialgleichungen (6) lässt sich eine gefälligere Form geben, indem man

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi = V - \xi_1 x^{(m-1)} - \xi_2 x^{(m-2)} - \cdots - \xi_{m-1} x', \\ \qquad\quad - \eta_1 y^{(n-1)} - \eta_2 y^{(n-2)} - \cdots - \eta_{n-1} x', \\ \qquad\quad - \zeta_1 z^{(p-1)} - \zeta_2 z^{(p-2)} - \cdots - \zeta_{p-1} z' \end{cases}$$

setzt. So wird nämlich durch Einführen der Funktion φ anstelle von V das System der gewöhnlichen Gleichungen (6) auf diese Weise dargestellt werden können:

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_{m-1}}, & \frac{d\xi_{m-1}}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x},\\
\frac{dx'}{dt} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_{m-2}}, & \frac{d\xi_{m-2}}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x'},\\
\dots &\quad \dots & \dots &\quad \dots\\
\frac{dx^{(m-1)}}{dt} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, & \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x^{(m-1)}},\\
\frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{n-1}}, & \frac{d\eta_{n-1}}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y},\\
\frac{dy'}{dt} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{n-2}}, & \frac{d\eta_{n-2}}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y'},\\
\dots &\quad \dots & \dots &\quad \dots\\
\frac{dy^{(n-1)}}{dt} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-1)}},\\
\frac{dz}{dt} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_{p-1}}, & \frac{d\zeta_{p-1}}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial z},\\
\frac{dz'}{dt} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_{p-2}}, & \frac{d\zeta_{p-2}}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial z'},\\
\dots &\quad \dots & \dots &\quad \dots\\
\frac{dz^{(p-1)}}{dt} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}, & \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial z^{(p-1)}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Weil natürlich die Funktion V die Größen

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots, \xi_{m-1},\ \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots, \eta_{n-1},\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_{p-1}$$

nicht enthält, wird aus (7), nach Ausnehmen des Wertes $i = 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i} &= -x^{(m-i)} = -\frac{dx^{(m-i-1)}}{dt},\\
\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_i} &= -y^{(n-i)} = -\frac{dy^{(n-i-1)}}{dt},\\
\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_i} &= -z^{(p-i)} = -\frac{dz^{(p-i-1)}}{dt};
\end{aligned}
$$

weiter

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\frac{\partial V}{\partial\xi}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{\partial V}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=\frac{\partial V}{\partial\zeta},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial V}{\partial z},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{(m-i)}}=\frac{\partial V}{\partial x^{(m-i)}}-\xi_i, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-i)}}=\frac{\partial V}{\partial y^{(n-i)}}-\eta_i, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z^{(p-1)}}=\frac{\partial V}{\partial z^{(p-1)}}-\zeta_i$$

Indem man diese Formeln aus den Differentialgleichungen (6) einsetzt, gehen die vorherigen (8) hervor.

Ich habe gezeigt, dass, während φ eine beliebige Funktion der Größen

$$t, \quad q_1, \quad q_2, \quad \cdots, \quad q_m, \quad p_1, \quad p_2, \quad \cdots, \quad p_m$$

ist, dass das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1}, & \dfrac{dp_1}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \\ \dfrac{dq_2}{dt}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_2}, & \dfrac{dp_2}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_2}, \\ \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{dq_m}{dt}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_m}, & \dfrac{dp_m}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_m}, \end{cases}$$

sehr eng mit der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(10) \qquad \frac{\partial W}{\partial t}=\varphi,$$

verbunden ist, in welcher die Größen p_i die partiellen Ableitungen der unbekannten Funktion W nach q_i bezeichnen. Es sei nämlich W die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (10), außer der wegen der Integration hinzuzufügenden Konstante mit den m beliebigen Konstanten α_1, $\alpha_2, \cdots, \alpha_m$ behaftet, dann ist die vollständige Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen durch diese Formeln gegeben:

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, & \dfrac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \cdots, \quad \dfrac{\partial W}{\partial q_m} = p_m, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, & \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \cdots, \quad \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m, \end{cases}$$

während $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ beliebige neue Konstanten bezeichnen, welche zusammen mit $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, welche die Funktion W betreffen, die verlangte Anzahl an $2m$ beliebigen Konstanten ergeben. Wenn umgekehrt durch vollständige Integration der Gleichungen (9) die Werte der Größen $q_1, q_2, \cdots, q_m$, $p_1, p_2, \cdots, p_m$ gefunden werden, dargeboten vermöge der Größe t und deren Anfangswerten

$$q_1^0, \; q_2^0, \; \cdots, \; q_m^0, \; p_1^0, \; p_2^0, \; \cdots, p_m^0,$$

wird die vollständige Lösung W der partiellen Differentialgleichung (10) über die Formel

$$(12)\quad W = \int \left\{ \varphi - p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} - \cdots - p_m \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} \right\} dt$$

erlangt, wenn freilich nach durchgeführter Integration mithilfe der Integralgleichungen die so gefundene Funktion der Größen t, $q_1^0, q_2^0, \cdots, q_m^0, p_1^0, p_2^0, \cdots, p_m^0$ in eine andere der Größen

$$t, \; q_1, \; q_2, \; \cdots, \; q_m, \; q_1^0, \; q_2^0, \; \cdots, \; q_m^0.$$

umgeformt wird.

Natürlich lässt sich durch die $2m$ Integralgleichungen, welche zwischen $2m+1$ Variablen und $2m$ beliebigen Konstanten statthaben, jede beliebige Funktion dieser $4m+1$ Größen in eine andere umformen, welche bloß $2m+1$ beliebige aus der Gesamtanzahl beinhaltet.

Das System der Differentialgleichungen (8) ist auf den ersten Blick klar, sich derselben Form zu erfreuen wie die Gleichungen (9), man setze in den Größen $q_1, q_2, \cdots, q_m$ lediglich die $m+n+p$ Größen

$$x, \; x', \; \cdots, \; x^{(m-1)}; \; y, \; y', \; \cdots, \; y^{(n-1)}; \; z, \; z', \; \cdots, \; z^{(p-1)}$$

ein, für $p_1, p_2, \cdots, p_m$ hingegen die Größen

$$\xi_{m-1},\ \xi_{m-2},\ \cdots,\ \xi;\ \eta_{n-1},\ \eta_{n-2},\ \cdots,\ \eta;\ \zeta_{p-1},\ \zeta_{p-2},\ \cdots,\ \zeta$$

Daher findet man die vollständige Integration der Differentialgleichungen (8) durch Suchen der einer Funktion W der Variablen

$$t,\ x,\ x',\ \cdots,\ x^{(m-1)};\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n-1)};\ z,\ z',\ \cdots,\ z^{(p-1)},$$

welche abgesehen von der durch Integration hinzutretenden Konstante mit $m+n+p$ Größen behaftet ist und welcher der partiellen Differentialgleichung

$$(13)\quad \frac{\partial W}{\partial t} = \varphi$$

Genüge leistet, wenn freilich in φ für die Größen

$$\xi_{m-1},\ \xi_{m-2},\ \cdots,\xi,\ \eta_{n-1},\ \eta_{n-2},\ \cdots,\eta,\ \zeta_{p-1},\ \zeta_{p-2},\ \cdots,\ \zeta$$

respektive die folgenden partiellen Ableitungen der Funktion W eingesetzt werden

$$\begin{array}{cccc}
\frac{\partial W}{\partial x}, & \frac{\partial W}{\partial x'}, & \cdots, & \frac{\partial W}{\partial x^{(m-1)}}, \\
\frac{\partial W}{\partial y}, & \frac{\partial W}{\partial y'}, & \cdots, & \frac{\partial W}{\partial y^{(n-1)}}, \\
\frac{\partial W}{\partial z}, & \frac{\partial W}{\partial z'}, & \cdots, & \frac{\partial W}{\partial z^{(p-1)}}.
\end{array}$$

Weil aus (7)

$$\begin{aligned}
\varphi = V &- \xi_1 x^{(m-1)} - \xi_2 x^{(m-2)} - \cdots - \xi_{m-1} x', \\
&- \eta_1 y^{(n-1)} - \eta_2 y^{(n-2)} - \cdots - \eta_{n-1} y', \\
&- \zeta_1 z^{(p-1)} - \zeta_2 z^{(p-2)} - \cdots - \zeta_{p-1} z'
\end{aligned}$$

ist, während V eine Funktion der Größen

$$t,\ x,\ x',\ \cdots,\ x^{(m-1)};\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n-1)};\ z,\ z',\ \cdots,\ z^{(p-1)};\ \xi,\ \eta,\ \zeta;$$

bezeichnet, wird die partielle Differentialgleichung (13) auf diese Weise dargestellt werden können:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} + x'\dfrac{\partial W}{\partial x} + x''\dfrac{\partial W}{\partial x'} + \cdots + x^{(m-1)}\dfrac{\partial W}{\partial x^{(m-2)}} \\ \qquad + y'\dfrac{\partial W}{\partial y} + y''\dfrac{\partial W}{\partial y'} + \cdots + y^{(n-1)}\dfrac{\partial W}{\partial y^{(m-2)}} \\ \qquad + z'\dfrac{\partial W}{\partial z} + z''\dfrac{\partial W}{\partial z'} + \cdots + z^{(p-1)}\dfrac{\partial W}{\partial y^{(p-2)}} = V, \end{cases}$$

wo die Funktion V außer den unabhängigen Variablen allein die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial W}{\partial x^{(m-1)}}, \quad \frac{\partial W}{\partial y^{(n-1)}}, \quad \frac{\partial W}{\partial z^{(p-1)}}$$

beinhaltet. Wir sehen also, dass die partielle Differentialgleichung (14) sowohl frei von der unbekannten Funktion ist als auch alle bis auf drei partielle Ableitungen nur linear beinhaltet.

Wenn es in Formel (12) eintritt, dass die Funktion φ mehrere Funktionen der Größen $p_1, p_2, \cdots, p_m$ nur linear verwickelt, gehen jene gänzlich aus der Größe heraus, welche hinter dem Integralzeichen steht:

$$\varphi - p_1\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} - \cdots - p_m\frac{\partial \varphi}{\partial p_m}.$$

Daher wird in unserem Fall diese Größe schlicht:

$$V - \xi\frac{\partial V}{\partial \xi} - \eta\frac{\partial V}{\partial \eta} - \zeta\frac{\partial V}{\partial \zeta} = U,$$

weil alle Größen ξ_i, η_i, ζ_i, außer ξ, η, ζ, die Funktion φ nur linear beeinflussen. Daher findet man aus Formel (12):

$$(15)\quad W = \int U dt.$$

Diese Formel nimmt an, dass nach vollständiger Integration der Differentialgleichungen (8) alle Variablen in t und deren Anfangswerten ausgedrückt sind, woher auch U eine Funktion allein von t wird; aber nach der Integration werden dann mithilfe der Integralgleichungen alle Größen ξ_i, η_i, ζ_i zusammen mit deren Anfangswerten eliminiert, woher W eine Funktion allein von t und x_i, y_i, z_i sowie deren Anfangswerten wird, welche dann die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (14) sein wird.

Wenn die Reduktion des isoperimetrischen Problems auf die partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche im Vorausgehenden für drei Funktionen erläutert worden ist, auf eine beliebige Anzahl an Variablen verallgemeinert wird, welche die Funktion U beeinflussen, erhalten wir diese Proposition:

Proposition über die Reduktion von isoperimetrischen Problemen auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

U verwickle außer der unabhängigen Variable t beliebig viele unbekannte Funktionen x_1, x_2 etc. derselben zusammen mit deren jeweiligen Ableitungen

$$x_1', \; x_1'', \; \cdots, \; x_1^{(\alpha)}; \; x_2', \; x_2'', \; \cdots, \; x_2^{(\beta)}; \; \text{etc.};$$

die Funktionen x_1, x_2 etc. werden als zu bestimmen vorgelegt, dass

$$\delta \int U dt = 0$$

wird; zu diesem Zweck setze ich

$$\frac{\partial U}{\partial x_1^{(\alpha)}} = \frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2^{(\beta)}} = \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}} \quad \text{etc.}$$

und eliminiere mithilfe dieser Gleichungen $x_1^{(\alpha)}$, $x_2^{(\beta)}$ etc. über die Funktion

$$V = U - x_1^{(\alpha)} \frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}} - x_2^{(\beta)} \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}} - \text{etc.};$$

auf diese Weise wird V eine Funktion der Größen

$$t, \; x_1, \; x_1', \; \cdots, \; x_1^{(\alpha-1)}, \; x_2, \; x_2', \; \cdots, \; x_2^{(\beta-1)}; \; \text{etc.},$$

welche ich als unabhängige Variablen ansehe, und nach Finden der Funktion V mithilfe der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}}, \quad \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}} \quad \text{etc.}$$

bilde ich die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &+ x_1' \frac{\partial W}{\partial x_1} + x_1'' \frac{\partial W}{\partial x_1'} + \cdots + x_1^{(\alpha-1)} \frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-2)}} \\ &+ x_2' \frac{\partial W}{\partial x_2} + x_2'' \frac{\partial W}{\partial x_2'} + \cdots + x_1^{(\beta-1)} \frac{\partial W}{\partial x_1^{(\beta-2)}} \\ &+ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \quad \cdots \\ &= V;\end{aligned}$$

deren Lösung W sei nun bereits gefunden, welche außer der durch Integration hinzutretenden Konstante die an der Zahl $\mu = \alpha + \beta + \cdots$ – gleich der Summe der Ordnungen, zu welcher die Differentiale der jeweiligen unbekannten Funktionen in U ansteigen – beliebigen Konstanten α_1, α_2, $\cdots$, α_μ beinhaltet; die unbekannten Funktionen x_1, x_2 etc. und deren Differentiale

$$x_1', \;\; x_1'', \;\; \cdots, \;\; x_1^{(\alpha-1)}, \;\; x_2', \;\; x_2'', \;\; \cdots, \;\; x_2^{(\beta-1)}; \;\; \text{etc.}$$

werden durch die folgenden μ Gleichungen zwischen jenen μ Größen und t bestimmt werden:

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2, \quad \cdots, \quad \frac{\partial W}{\partial a_\mu} = b_\mu,$$

in welchen b_1, b_2, $\cdots$, b_μ etc. neue beliebige Konstanten bedeuten.

Auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung können auch isoperimetrische Probleme zurückgeführt werden, in welchen zwischen den verschiedenen unbekannten Funktionen Zwangsbedingungen bestehen, und daher die Funktion *U*, welche hinter dem Integrationszeichen gefunden wird, nur als eine Differentialgleichung gegeben ist, welche sie erfüllen muss. Es ist aber im Allgemeinen nicht mehr möglich, einen Multiplikator des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen anzugeben, von dessen Integration jenes Problem abhängt.